МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра цифровых технологий, математики и экономики

Методическая разработка к выполнению расчетно-графической работы «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

по дисциплине: Математический анализ

название дисциплины

для направления (специальности) 09.03.01, 09.03.02

код направления (специальности)

Информатика и вычислительная техника, Информационные системы и технологии

наименование направления подготовки

бакалавриат, очная форма обучения

код и наименование специальности, форма обучения

Мурманск

2021

УДК 517.2(076)
ББК 22.161
М-54

Составитель – Кацуба Валентина Сергеевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры цифровых технологий, математики и экономики

Методическая разработка к выполнению расчетно-графической работы «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной» по дисциплине «Математический анализ» рассмотрена и одобрена на заседании кафедры-разработчика цифровых технологий, математики и экономики

«21» 06 2021 г., протокол № 12 .

дата

Оглавление

.

1. Общие организационно-методические указания

Расчетно-графическая работа «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной» предусмотрена во второй части дисциплины «Математический анализ» и состоит из двух частей, первая из которых относится к дифференциальному исчислению и вторая – к интегральному исчислению. Первая часть РГР включает в себя часть основных прикладных задач по модулю «Дифференциальное исчисление функций одной переменной». Кроме РГР, по этому модулю дисциплины проводится текущий контроль в форме самостоятельной работы «Техника дифференцирования и вычисление пределов по правилу Лопиталя».

Целевая установка: при выполнении РГР (часть 1) студент должен показать усвоенный материал по свойствам функции, исследованию функций с помощью производных, решению задач на наибольшее и (или) наименьшее значения функции (в том числе текстовых задач), решению задач на механический и геометрический смысл производных и приложения дифференциала.

2. Задание, план выполнения, требования к оформлению

РГР (часть 1) содержит 6 задач на основные приложения производной и дифференциала.

Содержание задач каждого варианта:

Задача 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке.

Задача 2. Провести полное исследование свойств функций и построить их графики (всего 3 функции).

Задача 3. Текстовая задача на наибольшее или наименьшее значение некоторой величины.

Задача 4. Задача на применение свойства дифференциала о его связи с приращением функции.

Задача 5. Задача на механический смысл первой и второй производных.

Задача 6. Задача на геометрический смысл производной.

В приложении А данной методической разработки приведены 33 варианта заданий.

Общие требования к оформлению РГР:

- решения задач должны быть оформлены рукописью в отдельной тетради;
- каждая задача должна иметь условие, подробное решение и ответ;
- в решении нужно ссылаться на теоретические факты (из темы РГР), на основании которых строится решение;
- построение чертежей (или рисунков), приведение подробных выкладок в решении обязательно;
- при сдаче работы на экспертизу к ней следует приложить распечатку условий задач выполненного варианта.

План выполнения РГР:

- Первая часть РГР выдается после самостоятельной работы по технике дифференцирования и выполняется студентом с помощью данной методической разработки, рекомендуемых учебных ресурсов и с использованием обучающей программы «Исследование функции и построение её графика» в течение двух – трех недель;
- Преподавателем может быть назначена защита РГР всей группе или отдельным студентам.

3. Список рекомендуемых учебных ресурсов

1. Конспект лекций «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» ведущего преподавателя дисциплины, в том числе в электронной форме.
2. Обучающая программа «Исследование функции и построение графика». Разработчики: Возженников А.П., Кацуба В.С. – Мурманск, 2005.

3. Приложения производной функции одной переменной. Практикум по высшей математике. Составитель: Тихонова В.Ф. – Мурманск, 2004. (электронный вариант).
4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для вузов. В 2 т. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - Изд. стер. - Москва : Интеграл-Пресс, 2005, 2001. - 416 с.
5. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 16-е изд. ; 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2018, 2017. – 279 с. (и предыдущие издания).
6. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа : учеб. пособие для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. - Изд. 15-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2009. - 735, [1] с. : ил. (и предыдущие издания).
7. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко [и др.]. - 7-е изд., испр. - Москва : Мир и Образование : Астрель : Оникс, [2012]. - 368 с. (предыдущие и последующие издания).

4. Образец заданий одного варианта

Наибольшее количество баллов: 8

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив её график на этом промежутке, если $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$, $x \in [-2;4]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = \frac{x^2}{e^x} + 1$; 2) $y = (x-1) \cdot \sqrt[3]{x^2}$; 3) $y = \frac{x^2+5}{x-1}$.

Задача 3

Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую площадь полной поверхности.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $f(1{,}05)$, если $f(x) = e^{0{,}1x(1-x)}$

.

Задача 5

Баржу, палуба которой на 4 м ниже уровня пристани, подтягивают к пристани при помощи каната. Канат наматывают на ворот с постоянной скоростью 2 м\сек. Определить, с каким ускорением a движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на расстоянии
8 метров (по горизонтали).

Задача 6

Составить уравнения касательных и нормалей к окружности $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ в точках ее пересечения с осью OX. Сделать чертеж.

5. Примеры выполнения заданий РГР

Задача 1

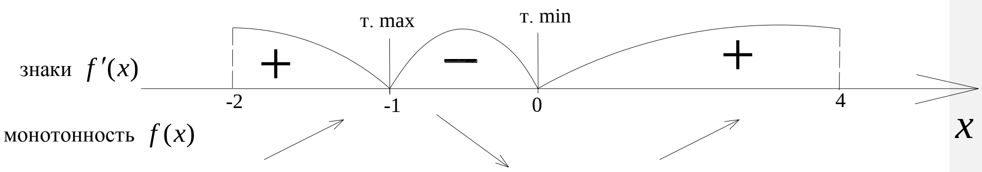
Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив её график на этом промежутке, если $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5,\ \ x \in [-2;4]$.

Решение

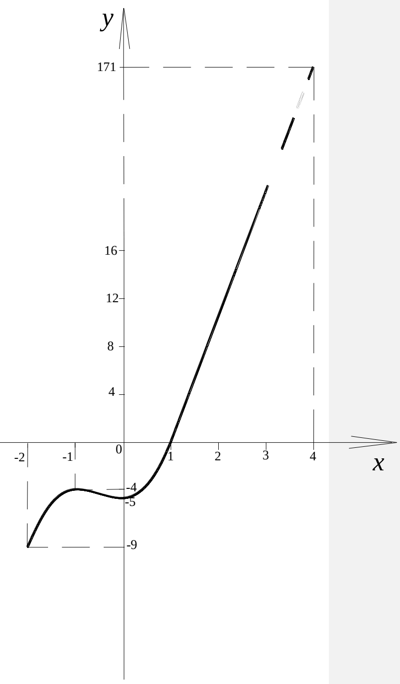
Данная функция является непрерывной на данном замкнутом промежутке, поэтому она имеет на этом промежутке наибольшее и наименьшее значения (это гарантируется теоремой Вейерштрасса о свойствах непрерывных функций на замкнутых промежутках).

Наибольшее и наименьшее значения функции могут достигаться в точках локальных экстремумов внутри отрезка или на концах отрезка.

Находим точки локальных экстремумов данной функции внутри данного отрезка, используя для этого необходимые и достаточные условия, связанные с первой производной функции:
$f'(x) = 6x^2 + 6x \Rightarrow$
$f'(x) = 0$, т.е. $6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 6x(x+1) = 0 \Leftrightarrow\ x = 0$ или $x = -1$ - это стационарные точки данной функции и обе они находятся внутри отрезка $x \in [-2;4]$;
проверяем достаточные условия экстремумов в стационарных точках:



$y_{\max} = f(-1) = -4, \quad y_{\min} = f(0) = -5.$



Находим значения $f(x)$ на концах данного промежутка:
$f(-2) = -9$, $f(4) = 171$.

Схематично строим график функции на заданном промежутке и по графику определяем, что

$\underset{[-2;4]}{y_{наиб}} = 171$ при $x = 4$, $\underset{[-2;4]}{y_{наим}} = -9$ при $x = 2$.

Ответ:
функция $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$ на промежутке $x \in [-2;4]$ имеет наибольшее значение $y = 171$, которое достигается при $x = 4$,
и наименьшее значение $y = -9$, которое достигается при $x = -2$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y=\dfrac{x^2}{e^x}+1$;   2) $y=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$;   3) $y=\dfrac{x^2+5}{x-1}$.

Решение

1. $\boldsymbol{y=\dfrac{x^2}{e^x}+1}$

1) <u>ООФ:</u> $x\in(-\infty;+\infty)$;
2) <u>ОЗФ, нули функции, промежутки знакопостоянства:</u> $y\in[1;\ +\infty)\Rightarrow$ нулей функции нет; $y>0$ при $\forall x\in$ ООФ;
3) <u>непрерывность, точки разрыва, вертикальные асимптоты:</u>

   функция непрерывна на своей ООФ, так как является элементарной, следовательно, нет точек разрыва, поэтому нет вертикальных асимптот;
4) <u>четность, периодичность:</u>

   функция может обладать свойством четности, так как её ООФ симметрична относительно нуля;

   $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{e^{-x}}+1=x^2\cdot e^x+1\neq\begin{cases}y(x)\\-y(x)\end{cases}$ – функция ни четная, ни нечетная;

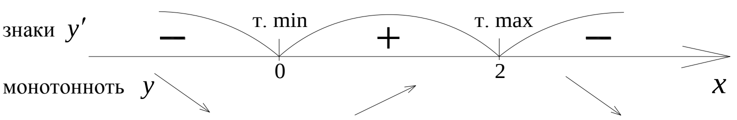
   функция не является периодической;
5) <u>монотонность, локальные экстремумы:</u>

   $y'_x=\dfrac{2\cdot x\cdot e^x-x^2\cdot e^x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x\left(2x-x^2\right)}{e^{2x}}=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$;

   необходимое условие экстремумов:

   $y'_x=0\Leftrightarrow\ \dfrac{2x-x^2}{e^x}=0\Leftrightarrow 2x-x^2=0\Leftrightarrow x(2-x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$ –это стационарные точки;

   достаточные условия монотонности и экстремумов:



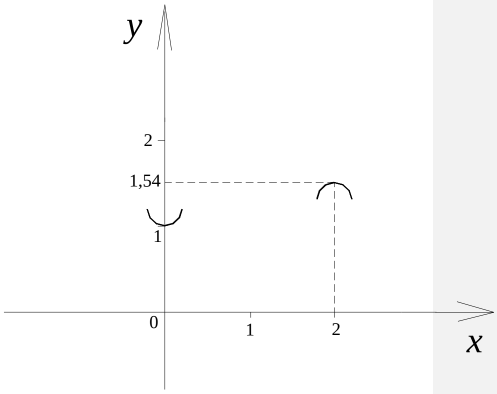
   значения локальных экстремумов:

   $y_{\min}=y(0)=\left.\left(\dfrac{x^2}{e^x}+1\right)\right|_{x=0}=1;$

   $y_{\max}=y(2)=\left.\left(\dfrac{x^2}{e^x}+1\right)\right|_{x=2}=\dfrac{4}{e^2}+1\approx1{,}54;$

   $y\downarrow$ на промежутках $x\in(-\infty;0)$ и $x\in(2;+\infty)$;

   $y\uparrow$ на промежутке $x\in(0;2)$;



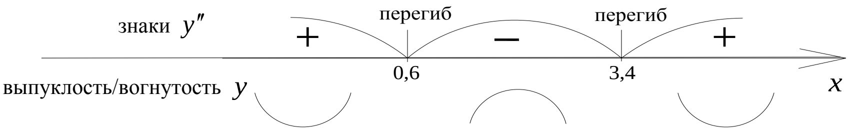
6) <u>вогнутость, выпуклость, точки перегиба:</u>

$$y''_x = \left(\frac{2x - x^2}{e^x}\right)' = \frac{(2-2x)e^x - e^x(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{e^x(2 - 2x - 2x + x^2)}{e^{2x}} = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x};$$

необходимое условие перегибов:

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}6 \\ x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}4 \end{array}\right. -$$ это точки, подозрительные на перегиб

достаточные условия выпуклости, вогнутости, точек перегиба:



ординаты точек перегиба:

$$y_{перегиба} = y(0,6) = \left.\left(\frac{x^2}{e^x} + 1\right)\right|_{x=0,6} \approx 1,2; \qquad y_{перегиба} = y(3,4) = \left.\left(\frac{x^2}{e^x} + 1\right)\right|_{x=3,4} \approx 1,4;$$

график функции имеет две точки перегиба $(0,6;\ 1,2)$ и $(3,4;\ 1,4)$, является вогнутым на промежутках $x \in (-\infty;\ 0,6)$ и $x \in (3,4;\ +\infty)$ и является выпуклым на промежутке $x \in (0,6;\ 3,4)$;

7) <u>наклонные и горизонтальные асимптоты:</u>

если график имеет наклонную асимптоту, то её уравнение $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}\big(f(x) - kx\big);$$

так как $e^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и $e^x \to 0$ при $x \to -\infty$, то для данной функции нужно отдельно рассматривать эти пределы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{e^x} + 1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x} + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x \cdot e^{-x} + \frac{1}{x}\right) = \infty \Rightarrow$$ при $x \to -\infty$ асимптот нет;

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{e^x} + 1\right)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow[\text{пр.Лопиталя}]{} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2xe^x - e^x x^2}{e^{2x}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \rightleftarrows \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{e^x} = 0;$$

так как $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x} + 1\right) =$

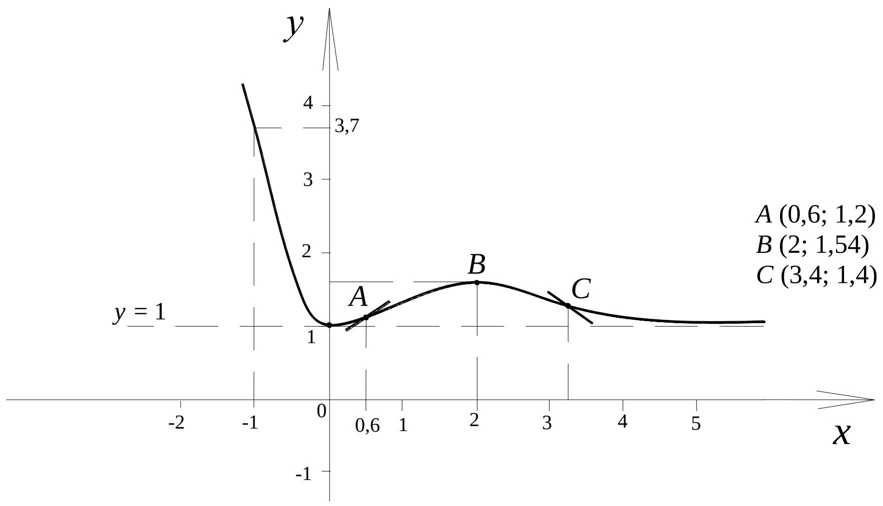
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + e^x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \rightleftarrows \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + e^x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \rightleftarrows \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e^x} + 1\right) = 1;$$

прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой, но только при $x \to +\infty$;

8) дополнительные точки графика:

$$y(-1) = \left(\frac{x^2}{e^x} + 1\right)\bigg|_{x=-1} = e + 1 \approx 3{,}7; \quad y(0) = 1.$$

Ответ 1: график функции $y = \dfrac{x^2}{e^x} + 1$



Сводная таблица свойств функции $y = \dfrac{x^2}{e^x} + 1$:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;0{,}6)$	0,6	$(0{,}6;2)$	2	(2; 3,4)	3,4	$(3{,}4;+\infty)$
$y'(x)$	–	0	+	+	+	0	–	–	–
$y''(x)$	+	+	+	0	–	–	–	0	+
$y(x)$	↘	min y=1	↗	перегиб $y \approx 1{,}2$	↗	max $y \approx 1{,}54$	↘	перегиб $y \approx 1{,}4$	↘

Горизонтальная асимптота: y=1 только при $x \to +\infty$. ОЗФ: $y \in [1;+\infty)$.

2. $\boldsymbol{y = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}}$

1) ООФ: $x \in (-\infty;+\infty)$;

2) непрерывность, точки разрыва, вертикальные асимптоты:

функция непрерывна на всей ООФ, т.е. при $\forall\ x \in (-\infty;+\infty)$, так как является элементарной, следовательно, точек разрыва нет и вертикальных асимптот нет;

3) четность, нечетность, периодичность:

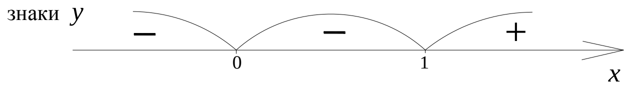
функция может обладать свойством четности, так как её ООФ симметрична относительно нуля;

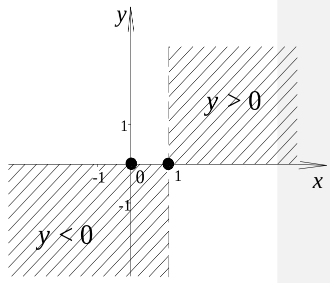
$$f(-x)=(-x-1)\cdot\sqrt[3]{(-x)^2}\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases}\Rightarrow$$ функция не является ни четной, ни нечетной;

функция не является периодической;

4) <u>нули функции и промежутки знакопостоянства:</u>

$$y=0\Leftrightarrow (x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}=0\Leftrightarrow x=0 \text{ или } x=1;$$





5) <u>монотонность, локальные экстремумы:</u>

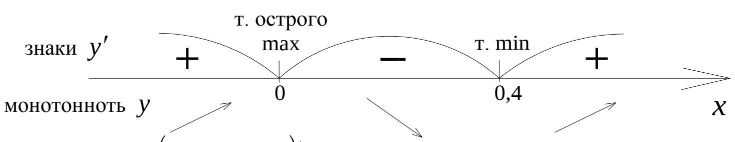
$$y'_x=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2x(x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{x}}=\frac{3x+2x-2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-2}{3\cdot\sqrt[3]{x}};$$

необходимое условие экстремумов

$$\left[\begin{array}{l}y'=0 \text{ при } x=\frac{2}{5}=0{,}4\\ y' \text{ не } \exists \text{ при } x=0\end{array}\right.\Rightarrow$$

функция имеет две критические точки $x_1=0{,}4$ и $x_2=0$, причем, точка x_2 является подозрительной на острый экстремум;

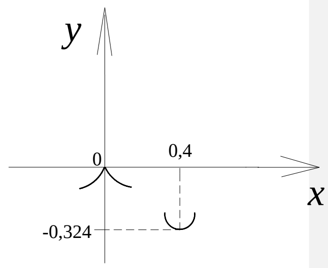
достаточные условия монотонности и экстремумов:



$$y_{\max}=y(0)=\left(\sqrt[3]{x^2}\cdot(x-1)\right)\Big|_{x=0}=0$$

$$y_{\min}=y(0{,}4)=\left(\sqrt[3]{x^2}\cdot(x-1)\right)\Big|_{x=0{,}4}=$$

$$=(0{,}4-1)\cdot\sqrt[3]{0{,}16}\approx-0{,}6\cdot0{,}54=-0{,}324;$$



6) <u>вогнутость, выпуклость, точки перегиба:</u>

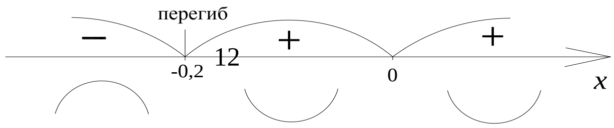
$$y''_x=\frac{1}{3}\left(\frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot\sqrt[3]{x}-(5x-2)\cdot\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{15x-5x+2}{3\sqrt[3]{x^2}\cdot3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2\cdot(5x+1)}{9\sqrt[3]{x^2}};$$

необходимые условия для точки перегиба:

$$\left[\begin{array}{l}y''=0 \text{ при } 5x+1=0, \text{ т. е. при } x=-0{,}2\\ y'' \text{ не существует при } x=0\end{array}\right.\Rightarrow$$

функция имеет 2 точки, подозрительные на перегиб;

достаточные условия для выпуклости, вогнутости, точки перегиба:



знаки y''

выпуклость/вогнутость y

ордината точки перегиба:

$y(-0{,}2)=\left(\sqrt[3]{x^2}\cdot(x-1)\right)\Big|_{x=-0,2}\approx -0{,}41;$

график функции имеет одну точку перегиба $(-0{,}2;\ -0{,}41)$, является выпуклым на промежутке $x\in(-\infty;\ -0{,}2)$ и является вогнутым на промежутке $x\in(-0{,}2;\ +\infty)$;

7) <u>наклонные и горизонтальные асимптоты:</u>

если график имеет наклонную асимптоту, то её уравнение $y=kx+b,$ где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot(x-1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\rightleftarrows\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\left(3\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)=\infty\ \Rightarrow$$

наклонных асимптот нет;

8) <u>дополнительные точки графика:</u>

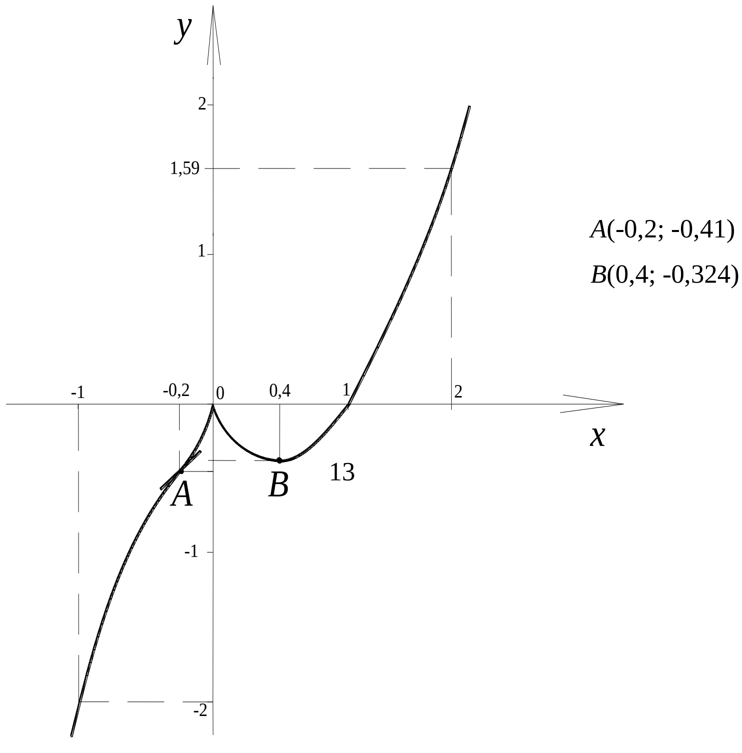
$y(-1)=\left(\sqrt[3]{x^2}\cdot(x-1)\right)\Big|_{x=-1}=-2;$ $\qquad$ $y(2)=\left(\sqrt[3]{x^2}\cdot(x-1)\right)\Big|_{x=2}=\sqrt[3]{4}\approx 1{,}59.$

Ответ 2: Сводная таблица свойств функции $y=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$:

x	$(-\infty;\ -0{,}2)$	-0,2	$(-0{,}2;\ 0)$	0	$(0;\ 0{,}4)$	0,4	$(0{,}4;\ +\infty)$
$y'(x)$	+	+	+	не $\exists$	–	0	+
$y''(x)$	–	0	+	не $\exists$	+	+	+
$y(x)$		перегиб $y=-0{,}41$		0		min $y=-0{,}324$	

Асимптот у графика нет. ОЗФ: $y\in(-\infty;+\infty)$.

График функции $y=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$



3. $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2 + 5}{x - 1}}$

1) <u>ООФ:</u> $x \neq 1$, то есть $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$;

2) <u>нули функции, промежутки знакопостоянства функции:</u>

$y = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x^2+5}{x-1} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \varnothing \;\Rightarrow$ нулей функции нет;

$y < 0$ на промежутке $x \in (-\infty;1)$, $y > 0$ на промежутке $x \in (1;+\infty)$;

3) <u>непрерывность, точки разрыва, вертикальные асимптоты:</u>

функция имеет точку разрыва $x = 1$, так как эта точка не принадлежит ООФ, но её окрестность входит в ООФ; чтобы узнать поведение функции в окрестности точки разрыва $x = 1$, нужно вычислить односторонние пределы функции при условии $x \to 1 \pm 0$:

$$\lim_{x \to 1+0} \left(\frac{x^2+5}{x-1} \right) = +\infty; \qquad \lim_{x \to 1-0} \left(\frac{x^2+5}{x-1} \right) = -\infty \quad \Rightarrow$$

$x = 1$ - точка бесконечного разрыва (разрыв второго рода),

прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции;

4) <u>четность, периодичность:</u>

ООФ не является симметричной относительно нуля, поэтому функция не может обладать свойством четности/нечетности, следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной; также функция не является периодической;

5) <u>монотонность, локальные экстремумы:</u>

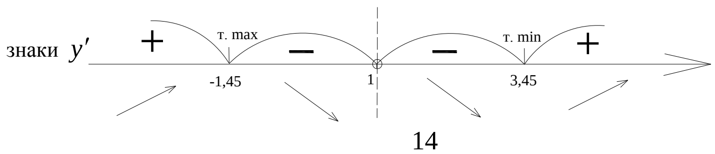
$$y'_x = \left(\frac{x^2+5}{x-1} \right)' = \frac{2x(x-1) - (x^2+5)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 5}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 5}{(x-1)^2};$$

необходимое условие экстремумов:

$$y'_x = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2 - 2x - 5}{(x-1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2 - 2x - 5 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{aligned} x_1 &= 1 - \sqrt{6} \approx -1{,}45 \\ x_2 &= 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}45 \end{aligned} \right.;$$

y'_x не существует при $x = 1$, но эта точка не входит в ООФ, поэтому не является подозрительной на экстремум;

достаточные условия монотонности и экстремумов:



монотонность y

вычисляем значения экстремумов функции:

$$y_{\max} = y\left(1-\sqrt{6}\right) = \left.\left(\frac{x^2+5}{x-1}\right)\right|_{x\approx -1,45} \approx -2{,}9;$$

$$y_{\min} = y\left(1+\sqrt{6}\right) = \left.\frac{x^2+5}{x-1}\right|_{x\approx 3,45} \approx 6{,}9;$$

данная функция возрастает на промежутках

$x \in (-\infty;-1{,}45)$, $x \in (3{,}45;+\infty)$ и

убывает на промежутках $x \in (-1{,}45;1)$, $x \in (1;3{,}45)$,

имеет два локальных экстремума:

$y_{\max} \approx -2{,}9$ при $x \approx -1{,}45$ и $y_{\min} \approx 6{,}9$ при $x \approx 3{,}45$;

6) <u>вогнутость/выпуклость, точки перегиба:</u>

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x-5}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - \left(x^2-2x-5\right)\left(2(x-1)\right)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2x-2)\left(x^2-2x+1-x^2+2x+5\right)}{(x-1)^4} = \frac{12(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{12}{(x-1)^3};$$

необходимое условие точки перегиба:

$$y''=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{12}{(x-1)^3}=0 \;\Leftrightarrow\; x\in\varnothing \;\Rightarrow\; \text{нет точек перегиба};$$

y'' не существует при $x=1$, но эта точка не входит в ООФ, поэтому в ней перегиб быть не может;

достаточное условие выпуклости/вогнутости:

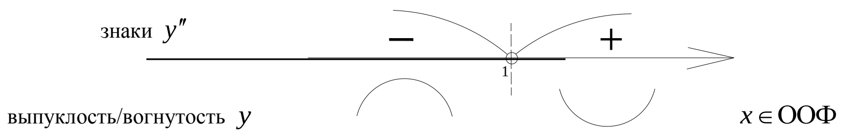


график функции является выпуклым на промежутке $x \in (-\infty;\, 1)$ и является вогнутым на промежутке $x \in (1;\, +\infty)$;

7) <u>наклонные и горизонтальные асимптоты:</u>

$$y = kx+b, \text{ где } \quad k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right);$$

вычисляем числа k и b для данной функции:

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{(x-1)x}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x-1}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5-x^2+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5+x}{x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{5}{x}+1\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=1;$$

по найденным числам k и b делаем вывод, что $y=x+1$ – это уравнение наклонной асимптоты.

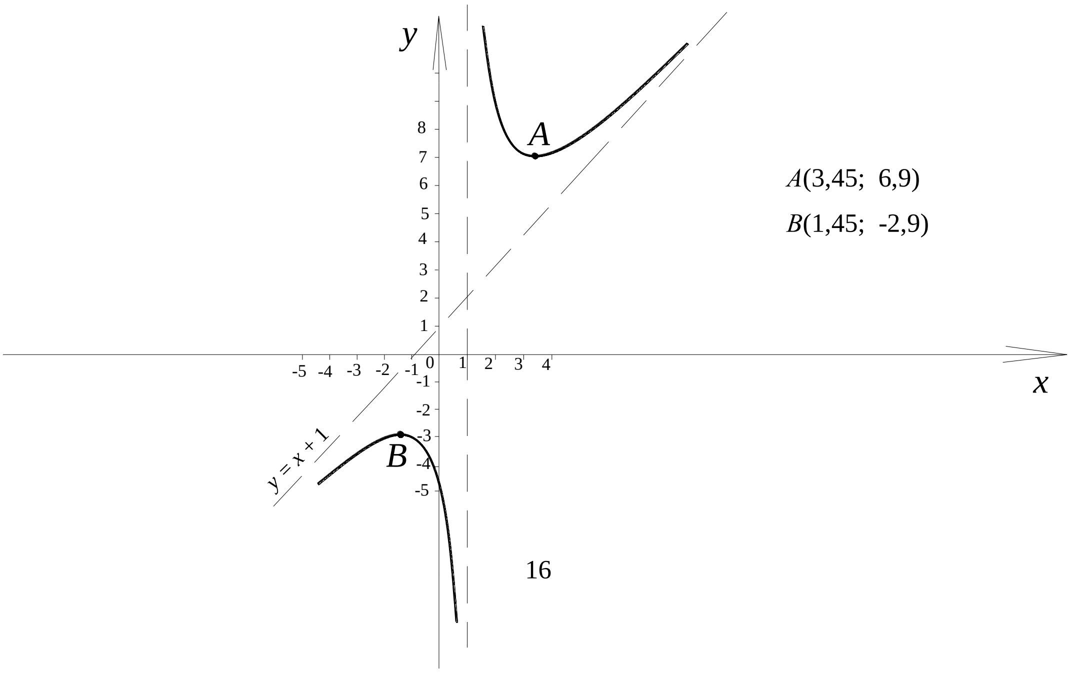
Ответ 3: Сводная таблица свойств функции $y=\dfrac{x^2+5}{x-1}$:

x	$(-\infty;-1{,}45)$	-1,45	(-1,45; 1)	1	(1; 3,45)	3,45	$(3{,}45;+\infty)$
$y'(x)$	+	0	–		–	0	+
$y''(x)$	–	–	–		+	+	+
$y(x)$	↗	max $y\approx-2{,}9$	↘		↘	min $y\approx 6{,}9$	↗

$y=x+1$ – уравнение наклонной асимптоты, $x=1$ – уравнение вертикальной асимптоты.

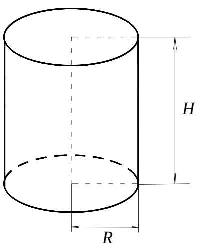
ОЗФ: $y\in(-\infty;-2{,}9)\cup(6{,}9;+\infty)$.

График функции $y=\dfrac{x^2+5}{x-1}$



Задача 3

Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую площадь полной поверхности.



Решение

Очевидно, что можно рассматривать бесконечное множество цилиндров, имеющих фиксированный объём, варьируя значения радиуса основания R и высоты H. Если записать известную формулу для объема цилиндра: $V=\pi R^2 H$, то становится понятно, что из двух размеров цилиндра R и H только один размер остаётся независимым, а другой выражается через него:

так как по условию задачи $V=const$, то $H=\dfrac{V}{\pi R^2}$.

Составим площадь полной поверхности цилиндра как функцию одной переменной R:

$$S_{пов}=2\pi R^2+2\pi R\cdot H=2\pi R^2+\frac{2\pi R\cdot V}{\pi R^2}=2\pi R^2+\frac{2V}{R}\Rightarrow \boxed{S(R)=2\pi R^2+\frac{2V}{R},\ R\in(0;+\infty)}.$$

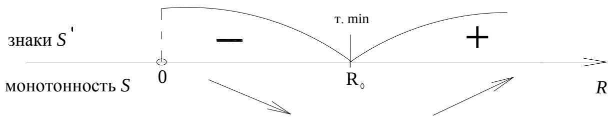
Таким образом, математическая модель задачи получилась в виде функции одной переменной, для которой требуется найти значение аргумента R, при котором составленная функция $S(R)$ имеет наименьшее значение.

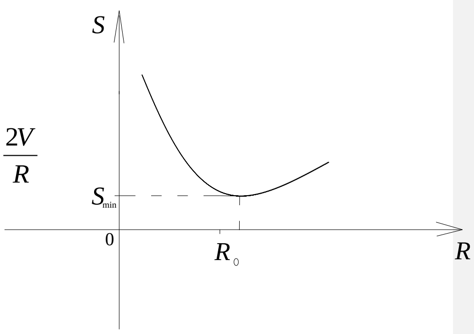
Найдем S' и точку R_0, подозрительную на локальный экстремум:

$$S'=\left(2\pi R^2+\frac{2V}{R}\right)'_R=2\pi\cdot 2R+\frac{0\cdot R-2V\cdot 1}{R^2}=4\pi R-\frac{2V}{R^2};$$

$S'=0$, то есть $4\pi R-\dfrac{2V}{R^2}=0\Leftrightarrow 2\pi R=\dfrac{V}{R^2}\Leftrightarrow R^3=\dfrac{V}{2\pi}\Rightarrow R_0=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Проверим достаточное условие экстремума в точке R_0:





нарисуем схематичный график функции $S(R)=2\pi R^2+\dfrac{2V}{R}$

и по графику определим, что

$S_{наим}=S_{\min}=S(R_0)$, где $R_0=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Вычисляем значение H при значении $R = R_0$:

$$H = \frac{V}{\pi R^2}\Bigg|_{R=R_0} = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\dfrac{V^2}{(2\pi)^2}}} = \frac{V^{\frac{1}{3}} \cdot 2}{\pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \cdot 2 \Rightarrow H = 2R.$$

В результате решения задачи получено, что при фиксированном объеме цилиндр будет иметь наименьшую площадь полной поверхности в том случае, когда его высота в два раза больше радиуса основания.

Ответ: $2R = H$.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $f(1{,}05)$, если $f(x) = e^{0{,}1x(1-x)}$.

Решение

Используем следующие теоретические факты:

$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ – формула для приращения функции $f(x)$ в точке x, вызванного приращением аргумента Δx;

$\Delta f \approx df$ – связь между приращением дифференцируемой функции и её дифференциалом, справедливая при малых приращениях аргумента Δx;

$df = f'(x) \cdot \Delta x$ – формула для вычисления дифференциала функции $f(x)$.

Тогда из совокупности этих теоретических фактов получаем, что

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f \approx f(x) + df = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x,$$

то есть при малых Δx значение функции $f(x)$ в некоторой приращенной точке $(x_0 + \Delta x)$ можно вычислить по следующей приближенной формуле:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x} \qquad (*)$$

В данной задаче имеем:
$x_0 + \Delta x = 1{,}05 = 1 + 0{,}05 \Rightarrow x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}05$;

$f(x_0) = f(1) = e^{0{,}1x(1-x)}\Big|_{x=1} = e^0 = 1$;

$f'_x = \left(e^{0{,}1x(1-x)}\right)'_x = e^{0{,}1x(1-x)}(0{,}1x - 0{,}1x^2)' = e^{0{,}1x(1-x)} \cdot (0{,}1 - 0{,}2x) \Rightarrow$

$f'(x_0) = f'(1) = 1 \cdot (-0{,}1) = -0{,}1$;

$f(1{,}05) = f(1+0{,}05) \approx f(1) + f'(1)\cdot 0{,}05 = 1 - 0{,}1\cdot 0{,}05 = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$.

При вычислении приближенного значения функции $f(x)$ по формуле $(*)$ получается погрешность, совпадающая с погрешностью при замене приращения этой функции на ее дифференциал:

$\Delta f \approx df$ - погрешность ε этого приближенного равенства теоретически известна и является величиной более высокого порядка малости, чем приращение аргумента Δx:

$$\varepsilon = o(\Delta x),\quad \Delta x \to 0.$$

В данной задаче $\Delta x = 0{,}05 = 5\cdot 10^{-2}$, поэтому погрешность можно описать как величину, имеющую более высокий порядок малости, т.е. $\varepsilon \le 10^{-3}$. Для понимания этого факта полезно вычислить искомое значение $f(1{,}05)$, где $f(x) = e^{0{,}1x(1-x)}$, используя калькулятор:

$f(x) = e^{0{,}1\cdot 1{,}05\cdot(1-1{,}05)} \approx 0{,}994764$; этот результат отличается от полученного значения по формуле (*) в третьем знаке после запятой, что согласуется с указанной величиной её погрешности ε.

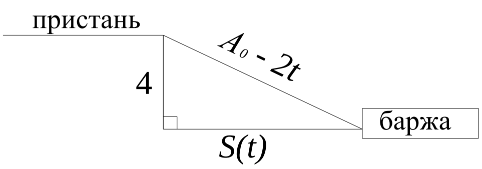
Ответ: $f(1{,}05) \approx 0{,}995$.

Задача 5

Баржу, палуба которой на 4 метра ниже уровня пристани, подтягивают к пристани при помощи каната. Канат наматывают на ворот с постоянной скоростью 2 м/сек. Определить, с каким ускорением a движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на расстоянии 8 метров (по горизонтали).

Решение

Рисунок к задаче:



S – расстояние от баржи до пристани (по горизонтали);
t – время, отсчитываемое от начала притягивания баржи к пристани;
t_0 – момент времени, в который баржа была удалена от пристани на 8 метров;
[S] = [1 м], [t] = [1 сек].

Закон движения баржи (функция $S(t)$) может быть составлен по теореме Пифагора:

$S(t) = \sqrt{(A_0 - 2t)^2 - 16}$, где A_0 – начальная длина каната;

ООФ $S(t)$: $(A_0 - 2t)^2 \ge 16$

Вычислим момент времени t_0, в который баржа была удалена на 8 метров от пристани:

$$S(t_0) = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(A_0 - 2t_0)^2 - 16} = 8 \Leftrightarrow (A_0 - 2t_0)^2 = 80 \Rightarrow A_0 - 2t_0 = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow t_0 = \frac{A_0 - 4\sqrt{5}}{2}.$$

По механическому смыслу производной имеем, что скорость движения баржи равна $S'(t)$, а ускорение равно $S''(t)$.

Вычислим $S''(t)$:

$$S'(t) = \left(\sqrt{(A_0-2t)^2-16}\right)'_t = \frac{-4A_0+8t}{2\sqrt{(A_0-2t)^2-16}} = \frac{2(2t-A_0)}{\sqrt{(A_0-2t)^2-16}};$$

$$S''(t) = \left(S'_t(t)\right)'_t = \frac{4\sqrt{(A_0-2t)^2-16} - \dfrac{2\cdot 2(2t-A_0)(2t-A_0)}{\sqrt{(A_0-2t)^2-16}}}{(A_0-2t)^2-16} = \frac{-64}{\left((A_0-2t)^2-16\right)\sqrt{(A_0-2t)^2-16}}.$$

Вычислим значение ускорения в момент времени t_0:

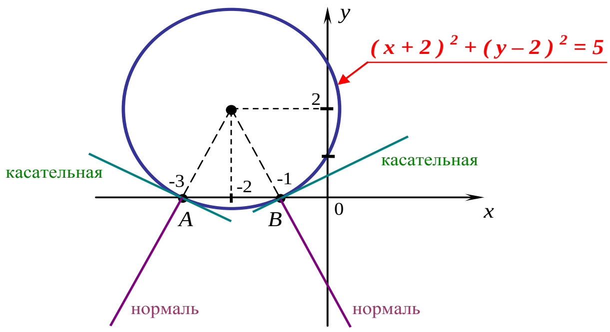
$$S''(t)\Big|_{t_0} = \frac{-64}{\left(\left(A_0-2\dfrac{A_0-4\sqrt{5}}{2}\right)^2-16\right)\sqrt{\left(A_0-2\dfrac{A_0-4\sqrt{5}}{2}\right)-16}} = -\frac{1}{8}; \quad [S''(t)] = [1 \text{ м/сек}^2].$$

Ответ: $a = -\dfrac{1}{8}$ м/сек^2.

Задача 6

Составить уравнения касательных и нормалей к окружности $x^2+y^2+4x-4y+3=0$ в точках ее пересечения с осью OX. Сделать чертеж.

Ответ:



В точке $A(-3;0)$: $x+2y+3=0$ - уравнение касательной, $2x-y+6=0$ - уравнение нормали;

в точке $B(-1;0)$: $x-2y+1=0$ - уравнение касательной, $2x+y+2=0$ - уравнение нормали.

Приложение А. Образец оформления титульного листа

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГАОУ ВО «Мурманский государственный технический университет»

Кафедра цифровых технологий,
математики и экономики

Расчетно-графическая работа

«Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

по дисциплине «Математический анализ»

выполнил:	студент группы ИВТб-21о
	Судов Андрей
проверил:	доцент Кацуба В.С.
оценка:	______________________
дата:	______________________

Мурманск
2022

Приложение Б. Варианты заданий

Специальности 09.03.01 ИВТ, 09.03.02 ИСТ
дисц. Математический анализ, часть 2

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 1

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = (2x+1)^2 \cdot (2x-1)^2$, $x \in [0;\ 4]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - x - 1$; 2) $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$; 3) $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$.

Задача 3

Доказать, что конический шатер данной вместимости требует наименьшего количества материи, когда его высота в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса основания.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1,02$.

Задача 5

В какой точке эллипса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината убывает с такой же скоростью, с какой абсцисса возрастает?

Задача 6

Найти угол между кривыми $y = x^3$ и $y = \dfrac{1}{x}$ в точке их пересечения. Выполнить построение.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 2

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$, $x \in [-1;\ 1]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = 3\sqrt[3]{(x-5)^2}$; 2) $y = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$; 3) $y = (3-x)\cdot e^{x-2}$.

Задача 3

Бревно длиной 20 метров имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны соответственно 2 метра и 1 метр. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением так, чтобы ось балки совпадала бы с осью бревна и объем балки был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 0{,}97$.

Задача 5

Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s = 1 + t + t^2$; расстояние s выражено в сантиметрах, время t – в секундах. Определить кинетическую энергию $\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)$ тела через 25 секунд после начала движения.

Задача 6

Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $y = 3x^2 - x^3$ в точке, где касательная параллельна прямой $y = 3x$. Сделайте чертеж к задаче.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 3

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$, $x \in [-2;\ 3]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$; 2) $y = x + \ln(x^2 - 4)$; 3) $y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$.

Задача 3

Прямо над центром круглой площадки фиксированного радиуса R=2метра нужно повесить фонарь. На какой высоте нужно это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которой обведена площадка. (Степень освещения некоторой площадки прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\sqrt{\dfrac{2{,}037^2 - 3}{2{,}037^2 + 5}}$.

Задача 5

Точка движется прямолинейно так, что скорость ее изменяется пропорционально квадратному корню из пройденного пути. Показать, что движение происходит под действием постоянной силы.

Задача 6

Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = \operatorname{sh} x$, проведенная в точке $(0;0)$? Составьте уравнения касательной и нормали к этой кривой в точке (0;0), сделайте чертеж.

Специальности 09.03.01 ИВТ, 09.03.02 ИСТ
дисц. Математический анализ, часть 2

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 4

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 3x^2 - 2 - x^3$, $x \in [-3;\ 1]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = (x^2+3)\cdot e^{2x}$; 2) $y = \ln x \cdot \sqrt{1-2x}$; 3) $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Задача 3

Каков должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади S=120, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1{,}04$.

Задача 5

Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 секунд. Найти угловую скорость ω через 32 секунды после начала движения.

Задача 6

Найти угол между кривой $y = x - x^3$ и прямой $y = 5x$ в точке их пересечения. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в этой точке. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 5

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = x^2 \cdot e^{-x}$, $x \in [-2;\ 1]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = e^{-x^2+4x}$; 2) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$; 3) $y = \dfrac{x^2}{2x^2-1}$.

Задача 3

Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 0{,}95$.

Задача 5

Имеется тонкий неоднородный стержень AB. Длина его $L = 20$ см. Масса отрезка AM растет пропорционально квадрату расстояния точки M от точки A, причем известно, что масса отрезка $AM = 2$ см равна 8 г. Найти: а) среднюю линейную плотность отрезка стержня $AM = 2$ см; б) среднюю линейную плотность всего стержня; в) плотность стержня в точке M.

Задача 6

Найти угол между кривыми $y = x^3$ и $y = \dfrac{1}{x^2}$ в точке их пересечения. Выполнить построение.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 6

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 3x - x^3$, $x \in [-1;\ 3]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 1}$; 2) $y = \dfrac{x^3}{e^x}$; 3) $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$.

Задача 3

Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара фиксированного радиуса R=30сантиметров (центр основания конуса лежит в центре шара).

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\sqrt{\dfrac{2,035^2 - 3}{2,035^2 + 5}}$.

Задача 5

Ордината точки, описывающей окружность $x^2 + y^2 = 25$, убывает со скоростью 1,5см/с. С какой скоростью изменяется абсцисса точки, когда ордината становится равной 4см?

Задача 6

На кривой $y = x - \ln(x+2)$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

Составить уравнения касательной и соответствующей ей нормали. Сделать чертеж.

Примечание [ВК1]: параллельной оси абсцисс

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 7

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$, $x \in [-1;\ 1]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств следующих функции и построить их графики:

1) $y = (x^2 - 1) \cdot e^{2x}$; 2) $y = \ln x \sqrt{1 - 2x}$; 3) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x^2}$.

Задача 3

На окружности дана точка *A*. Составить уравнение хорды *BC*, параллельной касательной в точке *A,* так чтобы площадь треугольника *ABC* была наибольшей.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\arcsin 0{,}4988$.

Задача 5

Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, дается формулой $Q(t) = 2t^2 + 3t + 1$ (кулон). Найти силу тока в конце пятой секунды.

Задача 6

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке с ординатой $y = 3$. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 8

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 6x - 8x^3$, $x \in [-1;\ 3]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств следующих функции и построить их графики:

1) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$; 2) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}-1$; 3) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Задача 3

Найти угол при вершине осевого сечения конуса наименьшей боковой поверхности, описанного около шара фиксированного радиуса $R=1$метр.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 0{,}975$.

Задача 5

Имеется тонкий неоднородный стержень AB. Длина его $L = 20$ см. Масса отрезка AM растет пропорционально квадрату расстояния точки M от точки A, причем известно, что масса отрезка $AM = 2$ см равна 8 г. Найти: а) среднюю линейную плотность отрезка стержня $AM = 2$ см; б) среднюю линейную плотность всего стержня; в) плотность стержня в точке M.

Задача 6

Найти угол, под которым пересекаются параболы $y=(x-2)^2$ и $y=-4+6x-x^2$. Выполнить построение.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 9

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, $x \in [-2;\ 3]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств следующих функции и построить их графики:

1) $y=3\sqrt[3]{(x-5)^2}$; 2) $y=(x-4)\cdot e^{x+2}$; 3) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Задача 3

Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность фиксированного радиуса R=20сантиметров.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\mathrm{arctg}\,1{,}024$.

Задача 5

В какой точке эллипса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината убывает с такой же скоростью, с какой абсцисса возрастает?

Задача 6

Составить уравнения касательной и нормали к цепной линии $y = \mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ в точке, где $x = 2\ln 2$. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 10

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x,\ x \in [-2;\ 1]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств следующих функции и построить их графики:

1) $y = x \cdot e^{-x^2}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 3}$; 3) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$.

Задача 3

Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара фиксированного радиуса R=60 сантиметров (центр основания конуса лежит в центре шара).

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\sqrt{(3{,}04)^2 - 5}$.

Задача 5

Определите, при каком значении угла скорости изменения синуса и тангенса этого угла имеют одинаковые значения.

Задача 6

Найти угол между кривыми $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x$. Выполнить построение.

Специальности 09.03.01 ИВТ, 09.03.02 ИСТ
дисц. Математический анализ, часть 2

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 11

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 3x - x^3$, $x \in [-2;\ 1]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств следующих функции и построить их графики:

1) $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$; 2) $y = \dfrac{e^x}{x}$; 3) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$.

Задача 3

Прямо над центром круглой площадки фиксированного радиуса R нужно повесить фонарь. На какой высоте нужно это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которой обведена площадка. (Степень освещения некоторой площадки прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $f(1{,}98)$, если $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3}$.

Задача 5

Сторона квадрата увеличивается со скоростью $v = 4 мм/сек$. Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда длина его стороны равна a=16*см*?

Задача 6

Составить уравнения касательной и нормали к астроиде: $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ в точке, для

которой $t = \dfrac{\pi}{4}$. Сделать чертеж.

Специальности 09.03.01 ИВТ, 09.03.02 ИСТ
дисц. Математический анализ, часть 2

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 12

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 2x^3 + 3x^2 - 5,\ x \in [-2;\ 0]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$; 2) $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 1}$; 3) $y = \dfrac{x^3}{e^x}$.

Задача 3

На странице книги печатный текст должен занимать S=1000 квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля должны быть по a=5см, правое и левое поле – по b=4см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\arcsin 0{,}482$.

Задача 5

Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 секунд. Найти угловую скорость ω через 32 секунды после начала движения?

Задача 6

Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде: $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ в точке, для которой $t = \dfrac{\pi}{2}$. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 13

З а д а ч а 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = x^2(x-2)^2$, $x \in [-2;\ 1{,}5]$.

З а д а ч а 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = 2\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}$; 2) $y = \dfrac{e^{2-x}}{2-x}$; 3) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

З а д а ч а 3

Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар фиксированного радиуса R=50см.

З а д а ч а 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\arcsin 0{,}4983$.

З а д а ч а 5

Тяжелую балку длиной 13 метров спускают на землю так, что нижний конец прикреплен к вагонетке, а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот. Канат сматывается со скоростью 2 м/мин. С каким ускорением откатывается вагонетка в момент, когда она находится на расстоянии 5 м от точки O (рис.1)?

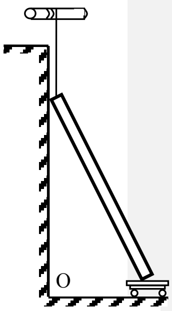


рис.1

З а д а ч а 6

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = \dfrac{3-2x}{3x+1}$ в точке её пересечения с осью OY. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 14

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 2 - 3x^2 - x^3$, $x \in [-1;\ 3]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + x}$; 2) $y = (x-2) \cdot e^{3+x}$; 3) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x^2}$.

Задача 3

Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар фиксированного радиуса R=80см.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1{,}08$.

Задача 5

Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, дается формулой $Q(t) = 2t^3 + 3t^2 + 1$ (кулон). Найти силу тока в конце пятой секунды?

Задача 6

Составить уравнения касательных и нормалей к кривой $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ в точках ее пересечения с осью абсцисс. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 15

***Задача* 1**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$, $x \in [-1;\ 3]$.

***Задача* 2**

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 1}$; 2) $y = \dfrac{4 - x^3}{x^2}$; 3) $y = \dfrac{e^{2x}}{(1+x)^2}$.

Задача 3

Три пункта A, B и C расположены так, что $\angle ABC = 30°$. Из пункта A выходит автомобиль, а одновременно из пункта B – поезд. Автомобиль движется по направлению к пункту B со скоростью 80 км/ч, поезд – по направлению к пункту C со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 0,97$.

Задача 5

Точка движется прямолинейно так, что скорость ее изменяется пропорционально квадратному корню из пройденного пути. Показать, что движение происходит под действием постоянной силы.

***Задача* 6**

Составить уравнения касательных и нормалей к кривой $y = x^2 - x^3$ в точках ее пересечения с осью OX. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 16

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, $x \in [-2;\ 3]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y=\ln^2(x+4)$; 2) $y=x\sqrt{x+3}$; 3) $y=\dfrac{x^2+1}{1-4x^2}$.

Задача 3

Из круга фиксированного радиуса R=2м вырезан сектор с центральным углом α. Из сектора свернута коническая поверхность. При каком значении угла α объем полученного конуса будет наибольшим?

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\sqrt{\dfrac{2,037^2-3}{2,037^2+5}}$.

Задача 5

Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = 1-3t+t^2$; расстояние s выражено в сантиметрах, время t – в секундах. Определить величину кинетической энергии $\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)$ тела через 15 секунд после начала движения.

***Задача* 6**

Составить уравнения касательной и нормали к астроиде: $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ в точке, для которой $t = \dfrac{\pi}{4}$. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 17

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 6x - 8x^3$, $x \in [-1;\ 3]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$;   2) $y = \dfrac{x^3}{e^x}$;   3) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} - 1$.

Задача 3

Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара фиксированного радиуса *R*.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\arcsin 0{,}4985$.

Задача 5

Поезд и воздушный шар отправляются в один и тот же момент из одного пункта. Поезд движется равномерно со скоростью 50 км/ч, шар поднимается (тоже равномерно) со скоростью 10 км/ч. С какой скоростью они удаляются друг от друга?

Задача 6

Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде: $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ в точке, для которой $t = \dfrac{\pi}{2}$. Выполнить построение.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 18

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = x^3(x-1)$, $x \in [-2; 3]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = \dfrac{4-x^3}{x^2}$; 2) $y = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$; 3) $y = \dfrac{x^3}{e^x}$.

Задача 3

На странице книги печатный текст должен занимать S=600 квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля должны быть по a=2 см, правое и левое – по b=1,5 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\arccos 0{,}501$.

Задача 5

Ордината точки, описывающей окружность $x^2 + y^2 = 25$, убывает со скоростью 1,5см/сек . С какой скоростью изменяется абсцисса точки, когда ордината становится равной 4см?

Задача 6

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = \dfrac{4-x^3}{x^2}$ в точке её пересечения с осью абсцисс. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 19

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 3x^2 - 2 - x^3$, $x \in [-2;\ 2]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств следующих функции и построить их графики:

1) $y = 10 \cdot \sqrt[3]{(x-4)^2}$; 2) $y = (x-1) \cdot e^{2x}$; 3) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x+1}$.

Задача 3

Три пункта *A*, *B* и *C* расположены так, что $\angle ABC = 60°$. Из пункта *A* выходит автомобиль, а одновременно из пункта *B* – поезд. Автомобиль движется по направлению к *B* со скоростью 70 км/ч, поезд – по направлению к *C* со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если *AB* = 300 км?

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\operatorname{arcctg} 1{,}08$.

Задача 5

Сторона квадрата увеличивается со скоростью $v = 2 см/мин$. Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда длина его стороны равна *a*=25см?

Задача 6

Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке с ординатой $y = 3$. Выполнить построение.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 20

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = x^2(x-2)^2$, $x \in [-2;\ 2]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств следующих функции и построить их графики:

1) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$; 2) $y = (x-2)\cdot e^{3+x}$; 3) $y = x\sqrt{x+3}$.

Задача 3

Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар фиксированного радиуса *R*.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\arcsin 0,46$.

Задача 5

Радиус круга изменяется со скоростью $v = 5мм/сек$. Какова скорость изменения длины окружности и площади круга в тот момент, когда радиус равен $r = 20см$?

Задача 6

Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = \operatorname{sh} x$, проведенная в точке $(0;0)$. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в этой точке. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 21

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 2 - 3x^2 - x^3$, $x \in [-2;\ 1]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств следующих функции и построить их графики:

1) $y = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$; 2) $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 3\right)^2}$; 3) $y = x - \ln(x+2)$.

Задача 3

Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар фиксированного радиуса *R*.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\arccos 0{,}48$.

Задача 5

Радиус шара изменяется со скоростью $v = 2 см/мин$. Определите, с какой скоростью изменяются объем и площадь поверхности шара.

Задача 6

Составить уравнения касательной и нормали к цепной линии $y = \mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ в точке, где $x = 2\ln 2$. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 22

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x,\ x \in [-2;\ 2]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств следующих функции и построить их графики:

1) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$; 2) $y = 4\sqrt[3]{(x-2)^2}$; 3) $y = x - \ln(x-2)$.

Задача 3

Докажите, что конический шатер данной вместимости требует наименьшего количества материи, когда его высота в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса основания.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\sqrt{(5{,}02)^2 - 9}$.

Задача 5

Определите, при каком значении угла скорости изменения синуса и тангенса одного и того же угла имеют одинаковые значения.

Задача 6

Найти угол между кривой $y = x - x^3$ и прямой $y = 5x$ в точке их пересечения. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в этой точке. Выполнить построение.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 23

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = x^2 e^x$, $x \in [-1;\ 2]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств следующих функции и построить их графики:

1) $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$; 2) $y = x + \sqrt{1 + x}$; 3) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

Задача 3

Через данную точку $P(1;4)$ провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\sin 80^0$.

Задача 5

Радиус круга изменяется со скоростью $v = 3 см / мин$. Какова скорость изменения длины окружности и площади круга в тот момент, когда его радиус равен $r = 30 см$?

Задача 6

Найти угол между кривыми $y = x^3$ и $y = \dfrac{1}{x^2}$ в их общей точке. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 24

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$, $x \in [-2;\ 2]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = (x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$; 2) $y = \left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$; 3) $y = \dfrac{x^2}{2}\cdot \ln x$.

Задача 3

Какова должна быть высота конуса, вписанного в шар фиксированного радиуса R=1,5м, для того чтобы его боковая поверхность была наибольшей?

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\arcsin 0,4983$.

Задача 5

Тяжелую балку длиной 13 метров спускают на землю так, что нижний конец прикреплен к вагонетке, а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот. Канат сматывается со скоростью 2 м/мин. С каким ускорением откатывается вагонетка в момент, когда она находится на расстоянии 5 м от точки O (рис.1)?

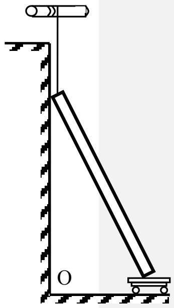


рис.1

Задача 6

Показать, что гиперболы $xy = 1$ и $x^2 - y^2 = 4$ пересекаются под прямым углом. Выполнить построение.

Специальности 09.03.01 ИВТ, 09.03.02 ИСТ
дисц. Математический анализ, часть 2

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 25

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 3x - x^3$, $x \in [-1;\ 3]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$; 3) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

Задача 3

Через данную точку $P(1;4)$ провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $f(1{,}15)$, если $f(x) = e^{0.1x(1-x)}$.

Задача 5

Поезд и воздушный шар отправляются в один и тот же момент из одного пункта. Поезд движется равномерно со скоростью 50 км/ч, шар поднимается (тоже равномерно) со скоростью 5 км/ч. С какой скоростью и с каким ускорением они удаляются друг от друга?

Задача 6

Показать, что кривые $y = 4x^2 + 2x - 8$ и $y = x^3 - x + 10$ касаются друг друга в точке $(3;34)$. Выполнить построение.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 26

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$, $x \in [1;\ 3]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = 2 - 3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$; 3) $y = e^{-x^2 + 2x}$.

Задача 3

Бревно длиной 10 метров имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны соответственно 2 метра и 1 метр. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением так, чтобы ось балки совпадала бы с осью бревна и объем балки был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $f(-1{,}15)$, если $f(x) = e^{0{,}1x(1+x)}$.

Задача 5

Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, дается формулой $Q = 2t^3 + 3t^2 + 1$ (кулон). Найти, чему равна величина силы тока в конце десятой секунды.

Задача 6

В каких точках касательная к кривой $y = \dfrac{2x}{4 + x^2}$ параллельна оси абсцисс? Составить уравнения касательной и нормали к этой кривой в одной из найденных точек. Сделать чертеж.

Специальности 09.03.01 ИВТ, 09.03.02 ИСТ
дисц. Математический анализ, часть 2

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 27

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 1 - 2\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}$, $x \in [-3;\ 1]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = x^3 \cdot e^{-x}$; 2) $y = \dfrac{2(x^2-4)}{(x+1)^2}$; 3) $y = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

Задача 3

Определите, чему равна высота прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара фиксированного радиуса R=2,5м.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно значение $\mathrm{arctg}1{,}05$.

Задача 5

Тело массой 2кг движется прямолинейно по закону $s(t) = 1 - 2t + t^2$; расстояние s выражено в сантиметрах, время t – в секундах. Определить кинетическую энергию $\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)$ тела через 15 с после начала движения.

Задача 6

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = \dfrac{3-2x}{3x+1}$ в точке её пересечения с осью ординат. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 28

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$, $x \in [-2;\ 0]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = (x^2 - 1) \cdot e^{2x}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$; 3) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

Задача 3

Найти высоту конуса наибольшего объема, если такой конус вписан в шар радиуса 1,5м.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно значение $\sin 85^0$.

Задача 5

Три пункта *A*, *B* и *C* расположены так, что $\angle ABC = 45°$. Из пункта *A* выходит автомобиль, а одновременно из пункта *B* – поезд. Автомобиль движется по направлению к *B* со скоростью 70 км/ч, поезд – по направлению к *C* со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если *AB* = 200 км?

Задача 6

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = \dfrac{4 - x^3}{x^2}$ в точке её пересечения с осью абсцисс. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 29

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 3x^2 + x^3$, $x \in [-2;\ 1]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - 9}{x^2}$; 3) $y = 2x + \dfrac{\ln x}{x}$.

Задача 3

Определите высоту конуса, вписанного в шар фиксированного радиуса *R=2м* и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\arcsin 0{,}488$.

Задача 5

Радиус круга изменяется со скоростью $2\,мм/сек$. Определите скорость изменения длины окружности и площади круга в тот момент, когда его радиус равен $r = 3\,см$.

Задача 6

На кривой $y = x - \ln(x+2)$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс, и составить уравнения касательной и нормали в этой точке. Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 30

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 3x^2 - x^3$, $x \in [-1;\ 2]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 - 1}$; 3) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

Задача 3

Через данную точку $P(2;4)$ провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $f(1,25)$, если $f(x) = e^{0.1x(1-x)}$.

Задача 5

Поезд и воздушный шар отправляются в один и тот же момент из одного пункта. Поезд движется равномерно со скоростью 50 км/ч, шар поднимается (тоже равномерно) со скоростью 10 км/ч. С какой скоростью и с каким ускорением они удаляются друг от друга?

Задача 6

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке $(-1;3)$.

Сделать чертеж.

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 31

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 4x - tgx$, $x \in [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$; 2) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2-4}$; 3) $y = x + \ln(\cos x)$.

Задача 3

Два самолета летят в одной плоскости и прямолинейно под углом 120 градусов и с одинаковой скоростью $v\,км/час$. В некоторый момент один самолет оказался в точке пересечения траекторий движения, а второй не долетел до неё на *а км*. Определите, через сколько времени между самолетами будем наименьшим и чему равно это расстояние.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $f(-1,2)$, если $f(x) = e^{0,2x(1+x)}$.

Задача 5

Колесо радиуса a катится по прямой. Угол φ поворота колеса за t секунд определяется равенством $\varphi = t + 0,5t^2$. Определите скорость и ускорение движения центра колеса.

Задача 6

Составить уравнения касательной и нормали к кривой, которая называется разверткой круга и описывается уравнениями $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ в её точке с $t = \frac{\pi}{4}$.

Сделать чертеж.

Специальности 09.03.01 ИВТ, 09.03.02 ИСТ
дисц. Математический анализ, часть 2

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 32

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2}$, $x \in [-1;\ 5]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; 2) $y = \dfrac{3-x^2}{x+2}$; 3) $y = x^2 e^{-x}$.

Задача 3

Определите размеры открытого бассейна объёмом 32 $м^3$ с квадратным дном так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\cos 100^\circ$.

Задача 5

Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t секунд поворачивается на угол $\varphi = a + bt - ct^2$, где a, b, c - положительные постоянные. Определите угловую скорость и ускорение вращения. В какой момент времени колесо остановится?

Задача 6

Составить уравнения касательной и нормали к астроиде $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ в точках её пересечения с прямой $y = x$. Сделать чертеж.

Специальности 09.03.01 ИВТ, 09.03.02 ИСТ
дисц. Математический анализ, часть 2

РГР «Приложения дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной», часть 1

Вариант 33

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке, построив ее график на этом промежутке, если $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$, $x \in [0,5;\ 3]$.

Задача 2

Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

1) $y = \dfrac{4\sqrt{x}}{x+2}$; 2) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$; 3) $y = xe^{-0,5x}$.

Задача 3

Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 сантиметров. Определить её большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

Задача 4

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\sin 100^\circ$.

Задача 5

Зенитный снаряд выброшен вертикально вверх с начальной скоростью *a м/сек.* Определить, на какой высоте x он будет находиться через t секунд. Через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от земли?

Примечание [ВК2]:

Примечание [ВК3]:

Примечание [ВК4]:

Примечание [ВК5]:

Примечание [ВК6]:

Примечание [ВК7]:

Задача 6

Определить угол, под которым пересекаются линии $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x$. Сделать чертеж.